Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

## SESSION 2022

## Épreuve de mathématiques

***GROUPEMENT B*** ***CODE : 22MATGRB2***

## Durée : 2 heures

| SPÉCIALITÉ | COEFFICIENT |
|---|---|
| Conception et industrialisation en microtechniques | 1,5 |
| Électrotechnique | 2 |

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**
**L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.**

**Document-réponse à rendre avec la copie :**
**Document-réponse ..... page 7/7**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.**
**Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.**

## EXERCICE 1 (10 points)

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de $20\ \text{m.s}^{-1}$ sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.

On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.

On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant $t$ .
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et $t$ est exprimé en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que $f$ est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

***Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.***

### Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}8\,y = 4\ ,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et où $y'$ est la fonction dérivée de $y$.

**1. a.** Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0{,}8y = 0$ .

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $y' + ay = 0$ | $y(t) = k\text{e}^{-at}$ |

**b.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 5$ .
Vérifier que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

**c.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**2.** On rappelle que $f(0) = 20$.
Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$.

**Partie B - Étude de la fonction $f$ .**

On admet que la fonction $f$ est définie pour tout $t$ appartenant à $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5\,.$$

Sa courbe représentative $C$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

**1.a.** Démontrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$ .

**b.** En déduire que la courbe $C$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

**2.** On admet que, pour tout réel $t$ appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(t) = -12\mathrm{e}^{-0{,}8t}\ .$$

Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

**3.** Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

**4.** Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -18{,}75\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5t$ .

**a.** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

**b.** On admet que la distance $d$, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants $t_0$ et $t_1$, est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt\ .$$

Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ . Donner une valeur arrondie au centimètre.

## Partie C - Étude locale.

On rappelle que l'on étudie la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}8t} + 5\ .$$

On rappelle que sa courbe représentative $C$ est reproduite au début de la **partie B**.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f$ au voisinage de zéro.

```
1  PolynômeTaylor(f(t), t, 0, 2)
   → 20 − 12 t + 24/5 t²
```

1. ***Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.***
   ***Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.***

Le développement limité de la fonction $f$ à l'ordre $2$ au voisinage de zéro est :

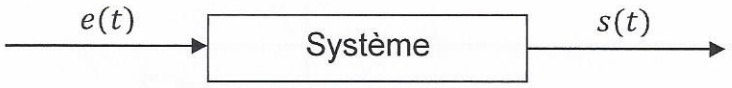
| | | |
|---|---|---|
| $20 - 12\,t + \frac{24}{5}\,t^2 + \epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ | $20 + \frac{24}{5}t^2$ | $20 - 12\,t + 4{,}8\,t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ |

2. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $C$ au point d'abscisse $0$.

## EXERCICE 2 (10 points)

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par $\mathcal{U}(t) = 0 \; si \; t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1 \; si \; t \geq 0$.

On considère le système électrique entrée-sortie schématisé ci-dessous.
On note $s(t)$ le signal de sortie associé au signal d'entrée $e(t)$.




Les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$.

On admet que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace notées respectivement $E(p)$ et $S(p)$.

La fonction de transfert $H(p)$ du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On a $e(t) = 2\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$ et $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

***On pourra utiliser le formulaire page suivante.***

**Partie A - signal d'entrée.**

**1.** Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, tracer la courbe représentative de la fonction $e(t)$.

**2.** Déterminer $E(p)$.

**Partie B - signal de sortie.**

**1.** Démontrer que $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \left(\dfrac{1}{p(p+1)}\right)e^{-p}$.

**2.** Vérifier que $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

**3.** Donner $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} \cdot e^{-p}\right)$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1} \cdot e^{-p}\right)$.

**4.** En déduire l'expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[0\,;1[$.

**5.** On admet que sur $[1\,; +\infty[$ on a :

$$s(t) = (e-2)e^{-t} + 1 \; .$$

**a.** Calculer $s(1)$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

**b.** Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, compléter la courbe représentative de la fonction $s$.

**c.** Donner la limite de la fonction $s(t)$ en $+\infty$.

## FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2

| Transformation de Laplace | |
|---|---|
| **Fonction** | **Transformée de Laplace** |
| $t \longmapsto \mathscr{U}(t)$ | $p \longmapsto \dfrac{1}{p}$ |
| $t \longmapsto \mathscr{U}(t-a)$ | $p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$ |
| **Propriétés** | |
| **Fonction** | **Transformée de Laplace** |
| $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ | $p \longmapsto F(p)$ |
| $t \longmapsto f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto F(p+a)$ |
| $t \longmapsto f'(t)\mathscr{U}(t)$ | $p \longmapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$ |

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.