Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 2 pour la plupart des spécialités, 2,5 en Constructions métalliques, 1,5 en Géologie appliquée, 1 en Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention, 3 en Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2018/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce

Le départ d'un wagon propulsé dans un tube à basse pression est modélisé par une fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps. L'exercice étudie cette fonction pour vérifier l'objectif de vitesse, puis mobilise un calcul intégral pour déterminer l'aire d'une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

L'équation est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. Ses solutions sont donc $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Elles sont définies sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. On dérive : $g'(t) = -15$.
2. On substitue dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$.

On retrouve le second membre de l'équation différentielle : g est bien une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = -15t - 75$ est une solution de $y' - 0,2y = 3t$.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Une solution particulière est $g(t) = -15t - 75$. À cette solution, on ajoute la solution générale de l'équation homogène associée, $ke^{0,2t}$. On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation différentielle avec second membre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant que le wagon se trouve au point de départ à t = 0.

La solution générale est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale donne $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante, on obtient la solution qui modélise la distance parcourue depuis le point de départ.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f(t) et f'(t) fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel fournit $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme l'exponentielle est croissante, cette inégalité équivaut à $t \geq 0$. Elle est donc vérifiée sur tout le domaine étudié, avec égalité en $t = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution sur $[0; 3]$ est $[0; 3]$.

Question 1° b). Déduire des résultats précédents les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est positive sur $]0; 3]$ et nulle en 0. La fonction est donc croissante sur $[0; 3]$. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$.

t	**0**	**3**
Variations de f	0	↗ $16,659$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est croissante de 0 à environ $16,659$ sur $[0; 3]$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

Au bout d'une minute, la distance est $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Elle vaut environ $1,605$ km. Arrondie au dixième de kilomètre, cette distance est donc $1,6$ km.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km.

Question 3° a). Sachant que la vitesse du wagon en kilomètres par minute à l'instant t est f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse à $t = 2$ est $f'(2) = 15e^{0,4} - 15$ km/min. Cette valeur est environ $7,377$ km/min, soit $7,4$ km/min au dixième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Le seuil de 400 km/h équivaut à $400/60 \approx 6,667$ km/min. Or la vitesse à 2 minutes vaut environ $7,377$ km/min. Comme $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est croissante, cette vitesse a dépassé le seuil avant 2 minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint avant 2 minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Recopier la réponse choisie sans justification.

À l'abscisse 2, la tangente a pour équation $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Après remplacement et réduction, on obtient la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

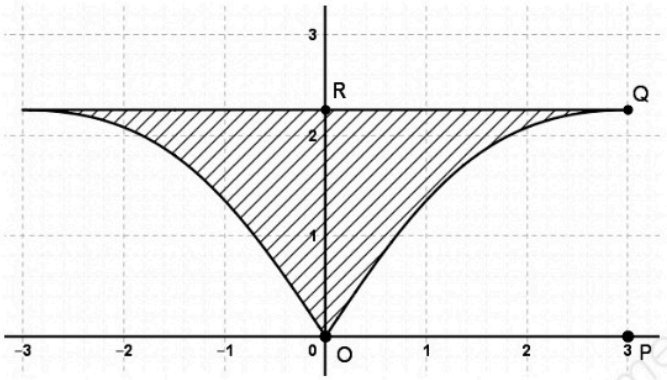
C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir la valeur de l'aire A1 du rectangle OPQR parmi les trois propositions.

Le rectangle $OPQR$ a une largeur de 3 unités, de $x = 0$ à $x = 3$, et une hauteur de $2,25$ unités. Son aire est donc le produit de ces dimensions : $A_1 = 3 \times 2,25$.

Aire du rectangle OPQR

dessiné la pièce suivante, représentée dans un repère orthonormé avec pour unité graphique 1 mètre sur les deux axes.



$A_1 = 3 \times 2{,}25 = 6{,}75$

On désire calculer de façon précise l'aire *A* hachurée sur le dessin. Pour cela on dispose des données suivantes :

Document professionnel

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. En exploitant la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la région limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

Comme $g(x) \geq 0$ sur $[0;3]$, l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive fournie, elle vaut $\frac{27}{4}[\ln(18) - \ln(9)]$, soit $\frac{27}{4}\ln(2)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

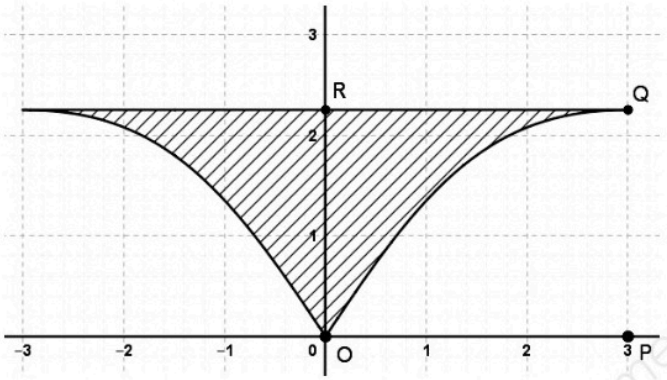
$A_2 = \frac{27}{4}\ln(2) \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unité d'aire, et arrondir le résultat au millième.

Par symétrie, l'aire hachurée est deux fois l'aire située à droite de l'axe des ordonnées. Cette aire correspond au rectangle moins la région sous la courbe : $A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right)$.

Aire hachurée totale

dessiné la pièce suivante, représentée dans un repère orthonormé avec pour unité graphique 1 mètre sur les deux axes.



$A = 2(A_1 - A_2) \approx 4{,}143$

On désire calculer de façon précise l'aire *A* hachurée sur le dessin. Pour cela on dispose des données suivantes :

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie des données de consommateurs sur l'obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis modélise les pannes non réparables d'un lot de téléphones. Il se termine par un test bilatéral comparant un sondage sur la marque B aux résultats d'une enquête menée auprès de 180 personnes.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des informations de l'énoncé portant sur 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle, y compris les totaux.

Sur 200 smartphones, 3 % sont touchés techniquement, soit 6, et 8 % sont touchés logiciellement, soit 16. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2. Les autres cases et les totaux se déduisent par différence.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour T, l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence technique », et L, l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T).

Les pourcentages de l'énoncé donnent directement les probabilités de chaque type d'obsolescence : 3 % pour l'obsolescence technique et 8 % pour l'obsolescence logicielle. La donnée de 12,5 % porte sur les seuls smartphones touchés par l'obsolescence logicielle. Elle correspond donc à la probabilité conditionnelle de T sachant L.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle, soit P(T ∩ L).

La probabilité d'être touché par les deux types d'obsolescence s'obtient avec la probabilité conditionnelle donnée : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Ainsi, $P(T \cap L) = 0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}01$.

Question 3° b). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence, soit P(T ∪ L).

Pour calculer la probabilité d'être touché par au moins un des deux types d'obsolescence, on additionne P(T) et P(L), puis on soustrait leur intersection, comptée deux fois : $P(T \cup L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}10$.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité d'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité recherchée est celle de L sachant T. Par la formule des probabilités conditionnelles, $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T) = 0{,}01 / 0{,}03 = 1/3$. Arrondie à 10^{-3}, elle vaut 0,333.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que le nombre X de smartphones non réparables dans un lot de 50 suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement étant assimilé à des tirages avec remise, les 50 tirages sont indépendants et la probabilité de non-réparabilité reste constante à chaque tirage. X compte le nombre de smartphones non réparables parmi ces 50 tirages : il suit donc une loi binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables si aucun n'est non réparable, donc si X = 0. La probabilité qu'un smartphone soit réparable est 1 − 0,045 = 0,955. Par indépendance, la probabilité que les 50 le soient est $0{,}955^{50}$, soit environ 0,100 à 10^{-3} près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = 0) ≈ 0,100.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme qui additionne les probabilités P(X = i) pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau des probabilités et des sommes successives S.

On calcule les probabilités de la loi binomiale B(50 ; 0,045), puis on les additionne successivement dans l'ordre de la boucle. Les valeurs du tableau sont arrondies à 10^{-3}.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La boucle additionne P(X = i) pour i allant de 0 à 3. Ainsi, S = P(X ≤ 3) : c'est la probabilité qu'au plus trois smartphones du lot soient non réparables. La somme obtenue est environ 0,813.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> S ≈ 0,813, soit environ 81,3 % de chances d'avoir au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte d'un lot de 50 smartphones.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut E(X) = np. Ici, E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. Cela signifie qu'en répétant les prélèvements de lots de 50 dans les mêmes conditions, le nombre moyen de smartphones non réparables par lot serait 2,25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 smartphones non réparables en moyenne par lot de 50.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir la valeur de h arrondie au centième telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, l'intervalle central de 95 % d'une loi normale s'étend approximativement sur 1,96 écarts types autour de la moyenne. Ainsi, h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252. Arrondi au centième, h vaut 0,07.

✓ RÉPONSE À RETENIR

h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, on conserve H_0 si la fréquence observée appartient à l'intervalle central de 95 % sous H_0. Avec h arrondi à 0,07, les bornes sont 0,55 − 0,07 = 0,48 et 0,55 + 0,07 = 0,62. En dehors de cet intervalle, on rejette H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Conserver H_0 si 0,48 ≤ f ≤ 0,62 ; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. À partir des 76 réponses favorables parmi les 180 personnes interrogées, déterminer la conclusion du test.

La fréquence observée est f = 76/180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de conservation de H_0. La fréquence se situe donc dans la zone de rejet : au seuil de 5 %, les résultats conduisent à rejeter l'hypothèse p = 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f ≈ 0,422 ; on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, Session 2018, code MATGRB1, durée de deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité. Les deux exercices portent sur le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones. Ils évaluent équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - ay = 0, les solutions sont de la forme y(t) = k e^(at).
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : f'(t) s'exprime ici en kilomètres par minute.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n,p), E(X) = np et P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k).
- Pour T et L, P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L), et P_T(L) = P(T ∩ L)/P(T).

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir la vitesse de kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de la comparer à l'objectif de 400 km/h.
- Pour l'aire hachurée, utiliser le dessin, la symétrie de la pièce et les bornes d'intégration indiquées.
- Pour justifier la loi binomiale, vérifier les deux issues, l'indépendance des tirages et la probabilité constante.
- Pour le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux deux bornes de la zone d'acceptation.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser la dérivée pour vérifier l'objectif de vitesse du wagon ?

La dérivée f'(t) donne la vitesse en kilomètres par minute. Évaluez-la à t = 2, multipliez le résultat par 60 pour obtenir des kilomètres par heure, puis comparez cette vitesse à l'objectif de 400 km/h et au délai annoncé.

Q : Comment reconnaître et paramétrer une loi binomiale dans cet exercice ?

Chaque téléphone constitue un essai à deux issues, réparable ou non, avec une probabilité de panne non réparable de 0,045. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, X suit la loi binomiale B(50, 0,045).

Q : Comment organiser son temps pendant cette épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties sont indépendantes. Commencez par les questions directes, puis traitez les calculs plus longs. Gardez du temps pour vérifier les unités, les arrondis et les interprétations demandées.

Q : Que faut-il présenter pour justifier une conclusion au test d'hypothèse ?

Rappelez la zone d'acceptation au seuil de 5 %, calculez la fréquence observée et comparez-la aux bornes. Concluez en indiquant si H0 est rejetée ou non, sans prétendre que l'hypothèse est définitivement prouvée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2018/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Chimie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.