Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôle des tubes fluorescents et conformité des rivets** (9 questions) — **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2022/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est freiné, et sa vitesse f(t) est modélisée par une fonction dépendant du temps. Les questions étudient une équation différentielle, les variations et la limite de f, la distance parcourue, un développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

On utilise la formule donnée pour l'équation homogène : pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Sur $[0; +\infty[$, $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui vérifie l'équation (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière, ici $g(t) = 5$, aux solutions de l'équation homogène associée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Sur $[0; +\infty[$, $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = 5 + C = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 20 - 5 = 15$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par somme et produit, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ tend vers 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C de f admet une asymptote, et en donner une équation.

Une limite finie de $f(t)$ en $+\infty$ donne une asymptote horizontale à la courbe. Son ordonnée est égale à cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En admettant que, pour tout t de [0 ; +∞[, f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, part de $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	−	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. À partir de l'étude de la fonction f, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse diminue, mais sa limite est $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et non 0. Selon le modèle, elle ne s'annule donc pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

On dérive F : $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Donc F est bien une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. La distance s'exprime en mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : parmi les trois expressions proposées, recopier sans justification celle qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.**

La troisième proposition est la seule qui présente un reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12$, donc on substitue ces valeurs dans l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle des tubes fluorescents et conformité des rivets

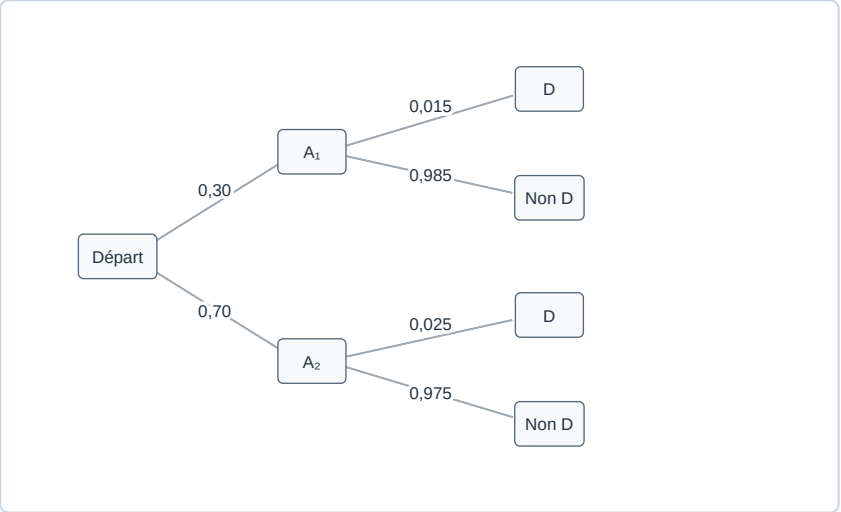
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, où les proportions de production et les taux de défaut diffèrent. L'exercice porte ensuite sur la durée de fonctionnement des tubes, modélisée par une loi exponentielle, et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Construire un arbre pondéré représentant la provenance d'un tube et la présence éventuelle d'un défaut : l'atelier 1 produit 30 % des tubes, dont 1,5 % sont défectueux, et l'atelier 2 produit 70 % des tubes, dont 2,5 % sont défectueux.

La première bifurcation donne la provenance du tube : atelier 1 avec une probabilité de 0,30, atelier 2 avec une probabilité de 0,70. Depuis chaque atelier, les branches « défaut » et « sans défaut » portent les probabilités conditionnelles correspondantes. Pour chaque atelier, ces deux probabilités ont une somme égale à 1. Les feuilles représentent ainsi les quatre issues possibles du prélèvement.

Provenance et défaut des tubes



A_1 et A_2 désignent les ateliers ; D désigne un tube défectueux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D : 0,015, non D : 0,985. Depuis A_2 : D : 0,025, non D : 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir la probabilité que les deux événements se réalisent, on multiplie la probabilité de provenir de l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Les données donnent donc : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Cette probabilité concerne l'ensemble de la production, et non uniquement les tubes de l'atelier 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. À l'aide des données de l'énoncé, déterminer la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut.

Un tube défectueux peut provenir de l'un ou l'autre atelier. Les deux chemins de l'arbre étant incompatibles, on additionne leurs probabilités :
$P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$.
Ainsi, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$. La fréquence de défauts attendue pour la production totale est donc de 2,2 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche une probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité qu'un tube soit sans défaut vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. On divise la probabilité du chemin recherché par celle de l'événement conditionnant :
$P(A_2 \mid \overline{D}) = 0{,}6825 / 0{,}978$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

La page du sujet indique $\lambda = 0{,}0001$ heure^{-1}. Pour une loi exponentielle, l'espérance est l'inverse du paramètre :
$E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures.
Dans le contexte, cela signifie que la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes est de 10 000 heures. Il s'agit d'une moyenne, et non d'une durée garantie pour chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures.

Question 2. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube choisi au hasard ait une durée de bon fonctionnement inférieure à 8 000 heures.

Le sujet donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, avec $\lambda = 0{,}0001$. En remplaçant t par 8 000 heures :
$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$.
La loi exponentielle est continue, donc $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Arrondie au centième, la probabilité vaut 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube choisi au hasard ait une durée de bon fonctionnement supérieure à 10 000 heures.

Pour une durée supérieure à t, on prend le complément de la probabilité d'une durée inférieure ou égale à t. Avec la formule fournie, cela donne $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ heures :
$P(T > 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$.
Arrondie au centième, cette probabilité vaut 0,37.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Un échantillon de 1 000 rivets contient 975 rivets conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur 1 000 rivets, 975 sont conformes, donc
$f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.
Cette fréquence sert d'estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production. Exprimée en pourcentage, elle correspond à 97,5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer, à l'aide de la formule fournie, un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 0{,}975$ et l'effectif est $n = 1\,000$. On applique la formule donnée dans le sujet :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right].$$

Les bornes obtenues sont environ 0,965323 et 0,984677. Arrondies au millième, elles donnent l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \; ; \; 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1. D'une durée de deux heures, son coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Elle étudie le freinage d'un chariot et le contrôle de tubes fluorescents et de rivets, en évaluant équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de construire celles de l'équation différentielle complète.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L quand t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- Pour une fréquence f observée sur n valeurs, l'intervalle fourni à 95 % est $[f - 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, inscrire les probabilités de provenance puis les probabilités conditionnelles de défaut sur les branches correspondantes.
- Pour une probabilité conditionnelle, diviser la probabilité de l'intersection par la probabilité de l'événement connu.
- Ne pas confondre une vitesse qui tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ avec une vitesse qui tend vers zéro : le chariot ne s'arrête pas selon le modèle.
- Conserver les valeurs exactes pendant les calculs et appliquer seulement l'arrondi demandé, notamment au centimètre ou à 10^{-2} et 10^{-3}.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube provienne d'un atelier et présente un défaut ?

Dans l'arbre, la probabilité d'une intersection se calcule en multipliant les probabilités des branches qui la composent. Pour $A_1 \cap D$, multipliez la proportion produite par l'atelier 1 par son taux conditionnel de défaut.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube dure plus longtemps qu'un seuil ?

La loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour calculer la probabilité d'une durée supérieure à t, utilisez l'événement complémentaire : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

Q : Comment organiser les calculs et les arrondis pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et l'usage de la calculatrice est autorisé. Gardez les valeurs exactes autant que possible, puis arrondissez uniquement selon la consigne de chaque question : au centimètre, à 10^{-2} ou à 10^{-3}.

Q : Quelles présentations facilitent l'évaluation des réponses ?

Montrez les formules et les étapes utiles, puis interprétez les résultats dans le contexte. Sur un tableau de variation, indiquez le signe de la dérivée et les limites ; pour un intervalle, écrivez clairement les deux bornes et leur arrondi.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2022/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Chimie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.