Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE LA CHIMIE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

# Mathématiques

**Session 2022** • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement


**1. Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) **Page 3**

**2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie** (9 questions) **Page 7**

**3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**


**Sujet officiel (PDF) :** https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2022/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

# 1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est modélisée par une équation différentielle puis par une fonction exponentielle. Les questions portent sur la résolution de cette équation, l'évolution de la vitesse, la distance parcourue et l'étude locale de la courbe.

## Partie A - Résolution d'une équation différentielle

**Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.**

On reconnaît une équation différentielle homogène de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0{,}8$. La formule donnée dans le sujet indique que ses solutions sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où $k$ est une constante réelle. En remplaçant $a$ par 0,8, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

---

**Question 1.b. Soit g définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

1. La fonction $g$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En remplaçant $y$ par $g$ dans l'équation, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$.
3. L'égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$ : la fonction proposée satisfait bien l'équation différentielle complète.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

---

**Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. À toute solution particulière, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée, trouvées à la question 1.a. Ainsi, on ajoute à 5 une fonction de la forme $ke^{-0{,}8t}$. Cette méthode donne toutes les solutions de l'équation différentielle, pour chaque constante réelle $k$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

**Question 2.** **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. La solution générale obtenue précédemment est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$.
2. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, car $e^0 = 1$.
3. On trouve alors $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant $k$ dans la solution générale, on obtient la fonction de vitesse recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

## Partie B - Étude de la fonction f

**Question 1.a.** **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par produit par la constante 15, le terme exponentiel tend également vers zéro. Il ne reste alors que le terme constant 5 dans la limite de $f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

**Question 1.b.** **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et en donner une équation.**

> Si une fonction tend vers un réel $L$ lorsque son argument tend vers $+\infty$, sa courbe admet la droite horizontale d'équation $y = L$ comme asymptote en $+\infty$.

Ici, la limite de $f(t)$ vaut 5. On applique cette propriété à la courbe représentative $C$ : son asymptote horizontale a pour ordonnée cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale de $C$ en $+\infty$ : $y = 5$.

**Question 2.** **À partir de l'expression fournie de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction $f$ est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et, d'après la limite précédente, $f(t)$ tend vers 5 en $+\infty$.

| $t$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | − | |
| $f(t)$ | 20 | ↘ 5 |

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f$ décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

---

**Question 3.** **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint zéro. Or, pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La vitesse vérifie donc les critères suivants :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ à tout instant fini ;
- la limite de sa vitesse est $5\ m{\cdot}s^{-1}$, et non zéro.

Le système ralentit le chariot, mais ne l'arrête pas selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ m{\cdot}s^{-1}$ et n'atteint jamais zéro.

---

**Question 4.a.** **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation d'une exponentielle composée, $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette dérivée est égale à $f(t)$ sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$ : $F$ est une primitive de $f$.

---

**Question 4.b.** **Calculer la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, donner sa valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

1. La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0)$.
2. Avec la primitive donnée, $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$.
3. La différence donne la valeur exacte. Son approximation décimale, arrondie au centimètre, fournit la distance demandée en mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m $\approx 15{,}33$ m.

## Partie C - Étude locale

**Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel affiche pour la partie régulière du développement limité le polynôme $20 - 12t + (24/5)t^2$. À l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, seule la troisième possède à la fois ce polynôme et un reste de cette forme. On a bien $24/5 = 4{,}8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

**Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro s'écrit $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. D'après l'expression fournie de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule, on obtient l'équation demandée pour la tangente $T$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

## 2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

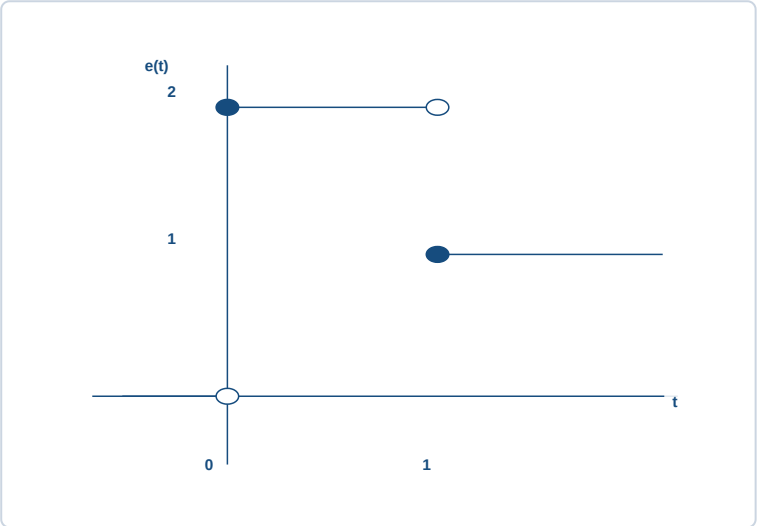
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). L'étude mobilise les transformées de Laplace pour déterminer et représenter le signal d'entrée et le signal de sortie.

### Partie A - Signal d'entrée

**Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t).**

La causalité donne d'abord $e(t) = 0$ pour $t < 0$. À $t = 0$, l'échelon $U(t)$ vaut 1 et $U(t-1)$ vaut 0 : le signal prend donc la valeur 2. Il reste égal à 2 jusqu'à l'instant 1 exclu. En $t = 1$, le second échelon vaut lui aussi 1, donc le signal saute à 1 et conserve cette valeur ensuite. Le tracé indique les points ouverts et fermés aux deux sauts.

**Courbe du signal d'entrée e(t)**




✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

**Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.**

Par linéarité de la transformation de Laplace, on transforme séparément les deux échelons de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$, puis $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$, car le second échelon est retardé d'une unité. On multiplie ensuite chaque transformée par son coefficient dans l'expression d'entrée et on soustrait le terme retardé.

$$E(p) = 2\mathcal{L}\{U(t)\} - \mathcal{L}\{U(t-1)\}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

## Partie B - Signal de sortie

**Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).**

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise la fonction de transfert donnée $H(p) = 1/(p+1)$, ainsi que la transformée de l'entrée trouvée en partie A, $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$. Le facteur $1/(p+1)$ multiplie chacun des deux termes. En mettant les produits sous forme de fractions, on obtient l'expression demandée :

1. $S(p) = \dfrac{1}{p+1}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p}\right)$.
2. $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

**Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).**

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est la différence entre les numérateurs croisés : $(p+1) - p = 1$. La fraction se réduit donc exactement à celle du membre de gauche. Cette identité est valable lorsque les deux fractions sont définies, soit pour $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p(p+1)}$.

**Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1).**

Les deux premières transformées inverses se lisent dans le formulaire : l'échelon unité correspond à $1/p$, et $e^{-t}U(t)$ correspond à $1/(p+1)$. Pour les deux autres, le facteur $e^{-p}$ traduit un retard d'une unité. La règle donne alors la fonction décalée multipliée par $U(t-1)$. Voici les résultats dans l'ordre demandé :

1. $\mathcal{L}^{-1}\{1/p\} = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{1/(p+1)\} = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-p}/p\} = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-p}/(p+1)\} = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

**Question 4.** **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

On utilise la décomposition en éléments simples vérifiée à la question précédente dans les deux termes de $S(p)$. Les termes contenant $e^{-p}$ correspondent à des fonctions retardées d'une unité, donc ils sont nuls sur $[0;1[$, où $U(t-1)=0$. Il ne reste que les inverses de $2/p - 2/(p+1)$. Le formulaire donne alors, sur tout l'intervalle demandé, l'expression suivante :

$$s(t) = 2U(t) - 2e^{-t}U(t) = 2(1-e^{-t}).$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1-e^{-t})$.

**Question 5.a.** **À partir de l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

Pour calculer la valeur en $t=1$, on substitue 1 dans l'expression admise sur $[1;+\infty[$ : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $(e-2)e^{-1} = 1 - 2/e$, la forme exacte se simplifie en $2 - 2/e$. En prenant $e \approx 2{,}71828$, on obtient $s(1) \approx 1{,}2642$. L'arrondi au dixième est donc $1{,}3$.

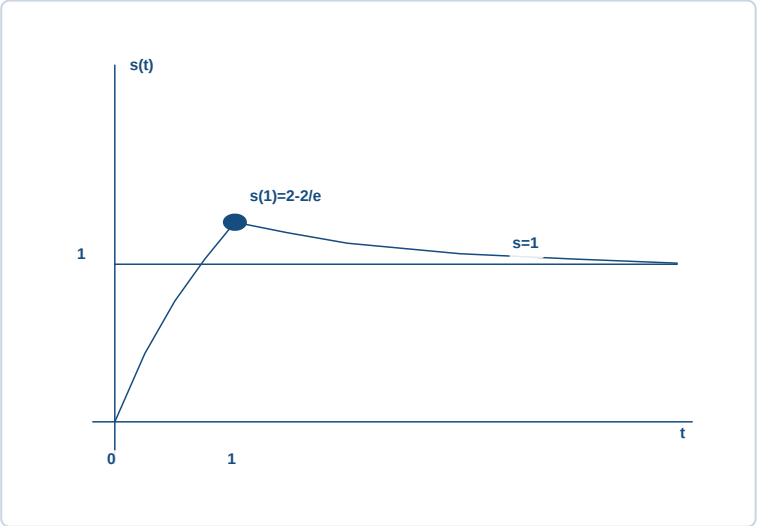
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$ au dixième.

**Question 5.b.** **Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, le signal suit $2(1-e^{-t})$ : il part de 0 et croît jusqu'à la valeur $2 - 2/e$ à l'instant 1. Pour $t \geq 1$, l'expression admise s'écrit $1 + (e-2)e^{-t}$. Elle rejoint cette même valeur en $t=1$, puis décroît vers 1 en restant au-dessus de 1. Le tracé représente ces deux portions et leur asymptote horizontale.

**Courbe du signal de sortie s(t)**



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, passe par $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

**Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour tout $t \geq 1$, on dispose de l'expression $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, l'exponentielle $e^{-t}$ tend vers 0. Le coefficient $e-2$ étant constant, le produit $(e-2)e^{-t}$ tend lui aussi vers 0. La limite de la somme est donc la constante qui reste, soit 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, et évalue équations différentielles, analyse de fonctions, développement limité et transformées de Laplace.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; pour un second membre constant, on ajoute une solution particulière.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ est 5 et l'asymptote horizontale est y = 5.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p ; un retard de a unités introduit le facteur e^(-ap).
- Le développement limité de f à l'ordre 2 en zéro est 20 - 12t + (24/5)t² + o(t²) ; la tangente dépend de f(0) et f'(0).

### Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation homogène d'une solution particulière avant d'imposer la condition initiale.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, vérifier si sa vitesse atteint zéro, et pas seulement si elle décroît.
- Calculer la distance par l'intégrale de la vitesse entre les deux instants, en appliquant correctement les bornes de la primitive.
- Dans l'exercice de Laplace, tenir compte du retard d'une unité et respecter les intervalles distincts de définition de s(t).

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire avec un second membre constant ?**

On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière. La solution générale est leur somme. La condition initiale permet ensuite de déterminer la constante de la solution homogène.

**Q : Comment utiliser le décalage temporel dans une transformée de Laplace ?**

Le signal retardé f(t-a)U(t-a) a pour transformée F(p)e^(-ap). Il faut identifier le retard a, appliquer ce facteur exponentiel, puis utiliser les transformées usuelles pour retrouver le signal.

**Q : Comment organiser les deux heures de cette épreuve ?**

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, l'un sur le freinage et l'autre sur les transformées de Laplace. Répartissez le temps entre les exercices et gardez une marge pour vérifier les calculs et compléter le document-réponse.

**Q : Quels éléments vérifier avant de rendre les réponses ?**

Présentez les étapes des démonstrations, les unités lorsqu'elles sont demandées et les valeurs approchées avec la précision indiquée. Pour les tracés, complétez le document-réponse et vérifiez leur cohérence avec les expressions obtenues.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2022/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

**Ressources BTS Métiers de la Chimie :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.