Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE LA CHIMIE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2023/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps pendant la fermeture. L'exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, un algorithme et un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc l'équation possède deux racines réelles distinctes. La formule quadratique donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

L'équation caractéristique associée est celle résolue à la question précédente : ses racines distinctes sont -1 et -4. Le tableau fourni indique alors que la solution générale est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. À partir de la position initiale de M et de sa vitesse initiale, déterminer f(0) et f'(0).

Grandeur à l'instant initial	Valeur
Distance entre O et M	20 cm
Vitesse de M vers O	-10 cm·s^{-1}

La vitesse est négative puisque la distance OM diminue pendant la fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance au bout de deux secondes se trouve en évaluant la fonction admise à $t = 2$. On remplace donc t par 2 dans chacun des deux termes exponentiels, sans arrondir afin de conserver la valeur exacte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

À 4 secondes, la distance vaut $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Cette valeur est inférieure au seuil de $0,5$ cm. La fonction étant continue, le seuil a donc été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. Le tiroir est fermé avant 4 secondes, car $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite fournie pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers zéro. Leur combinaison linéaire tend donc également vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est nulle. La courbe se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée zéro : cette droite est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale est l'axe des abscisses : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, la dérivée de $\frac{70}{3}e^{-t}$ est $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et celle de $-\frac{10}{3}e^{-4t}$ est $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	0

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante sur tout l'intervalle considéré.

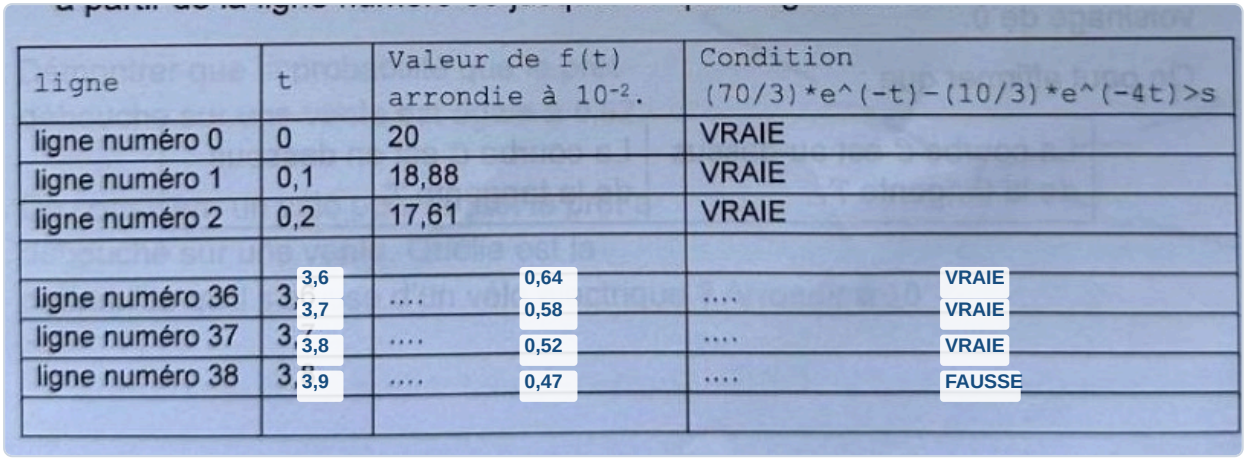
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau, à partir de la ligne numéro 36 et en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième et de la condition de la boucle, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

À chaque ligne, la valeur de t augmente de $0,1$. On évalue $f(t)$, puis on teste si cette valeur dépasse $0,5$. La boucle s'arrête à la première condition fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	 0,64	.... VRAIE
ligne numéro 37	3,7	 0,58	.... VRAIE
ligne numéro 38	3,8	 0,52	.... VRAIE
	3,9	 0,47	.... FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Lignes 36 à 39 : $0,64$ VRAIE ; $0,58$ VRAIE ; $0,52$ VRAIE ; $0,47$ FAUSSE.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

L'algorithme augmente t jusqu'à ce que la condition de boucle devienne fausse. D'après le tableau, elle est encore vraie à $t = 3,8$, puis fausse à $t = 3,9$, où la distance passe sous le seuil de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin, $t = 3,9$ s : le tiroir est fermé.

Question 4.a. À partir de la partie régulière du développement limité fournie, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le développement limité fourni est $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + o(t^2)$. La tangente en l'abscisse 0 utilise le terme constant $f(0) = 20$ et le coefficient de t, égal à $f'(0) = -10$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions, recopier la réponse exacte donnant le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Parmi les propositions, il faut choisir celle qui reprend la partie régulière fournie, $20 - 10t - 15t^2$, puis ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. Choisir l'affirmation correcte concernant la position de la courbe C par rapport à sa tangente T au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Au voisinage de 0, la différence entre la courbe et sa tangente est $f(t) - T(t) = -15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Le terme dominant est négatif pour $t \neq 0$ assez proche de zéro ; la courbe se situe donc sous la tangente.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Au voisinage de 0, $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

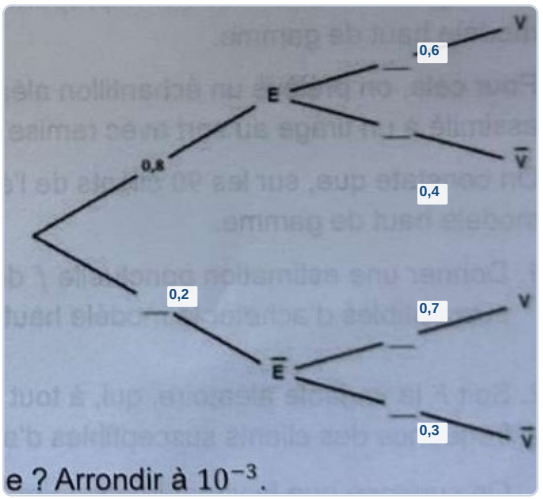
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques et observe si le prêt débouche sur une vente. L'exercice traite également du temps de réparation de vélos et de l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

Au premier niveau, les probabilités distinguent les deux types de vélos : électrique et mécanique. Au second niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles de vente et d'absence de vente. Pour chaque type, ces deux probabilités sont complémentaires et leur somme vaut 1. L'arbre conserve également la probabilité 0,8 déjà indiquée sur la branche électrique.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2. Après E : vente 0,6, absence de vente 0,4. Après mécanique : vente 0,7, absence de vente 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V) qu'un vélo choisi soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

On considère le chemin de l'arbre où le vélo prêté est électrique et où le prêt débouche sur une vente. La probabilité d'un chemin est le produit de la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de la branche suivante.

Ainsi, avec les données de l'énoncé, on obtient $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux types de vélos peuvent conduire à une vente. Ces chemins étant incompatibles, la probabilité totale d'une vente est la somme de leurs probabilités.

1. Vélo électrique et vente : $0,8 \times 0,6 = 0,48$.
2. Vélo mécanique et vente : $0,2 \times 0,7 = 0,14$.
3. Donc $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a débouché sur une vente. La probabilité conditionnelle se calcule en divisant la probabilité de l'événement « électrique et vente » par celle de l'événement « vente ». D'après les résultats précédents, $P(E \cap V) = 0,48$ et $P(V) = 0,62$. Ainsi, $P_V(E) = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$, puis on arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0,774$.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.**

Un succès correspond à une réparation nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre. La probabilité de succès est donc $0,62$, et la probabilité contraire vaut $1 - 0,62 = 0,38$. Les 80 réparations constituent les 80 épreuves de Bernoulli de l'expérience. Puisque l'énoncé admet le modèle binomial, le nombre de succès est décrit par une loi de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une variable binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est donnée par $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1 - 0,62)^{80-40}$. En remplaçant le complément de $0,62$ par $0,38$, on obtient environ $0,008288$. L'arrondi au millième est donc $0,008$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, alors $80 - X$ en nécessitent plus d'une heure. La condition demandée s'écrit $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$.

- On cherche donc $P(X \geq 41)$.
- Par complément, $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40)$.

Avec la loi binomiale $\mathcal{B}(80\,;\,0,62)$, cette probabilité vaut environ $0,980919$, soit $0,981$ au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilité cherchée : $0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle d'une proportion est la fréquence observée dans l'échantillon. Ici, 54 clients sur les 90 interrogés sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On divise donc le nombre de clients concernés par l'effectif total : $f = \dfrac{54}{90} = 0,6$. Cela correspond à une fréquence observée de 60 % dans cet échantillon, et constitue l'estimation demandée de la proportion inconnue p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.**

La formule fournie utilise la fréquence observée $f = 0,6$ et l'effectif $n = 90$. La marge est $1,96\sqrt{\dfrac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,101214$. Les deux bornes sont donc calculées en retranchant puis en ajoutant cette marge à $0,6$.

Borne	Calcul	Valeur arrondie
Inférieure	$0,6 - 0,101214$	0,499
Supérieure	$0,6 + 0,101214$	0,701

L’intervalle s’écrit avec ces deux valeurs arrondies au millième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.

Un intervalle de confiance à 95 % provient d’une méthode qui, lorsqu’on répète les prélèvements dans les mêmes conditions, produit un intervalle contenant la proportion réelle dans 95 % des cas. Ce niveau de confiance ne signifie donc pas que l’intervalle calculé à partir de cet échantillon précis contient forcément p.

- L’intervalle obtenu donne une estimation encadrée de p.
- Il ne garantit pas avec certitude l’appartenance de p à cet intervalle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on n’est pas certain que p appartienne à cet intervalle.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, dure deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Les deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir et un magasin de vélos, avec équations différentielles, fonctions, probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la forme de la solution générale.
- Si $f'(t) < 0$, f est décroissante ; si $f(t)$ tend vers 0 en $+\infty$, la courbe admet l'asymptote horizontale $y = 0$.
- La probabilité d'une intersection se calcule par $P(E \cap V) = P(E)P(V|E)$; la probabilité totale additionne les branches menant à V.
- Pour X binomiale de paramètres n et p, l'intervalle fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe de la vitesse initiale et distinguer f(0), la position, de f'(0), la vitesse.
- Dans l'algorithme, tenir compte du test de la condition avant l'incrémentation de t par 0,1.
- Traduire la comparaison des réparations par $X > 80 - X$, en tenant compte du caractère strict de l'inégalité.
- Arrondir les résultats au millième quand demandé et distinguer estimation ponctuelle et intervalle de confiance.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez $r^2 + 5r + 4 = 0$, puis utilisez ses racines réelles distinctes pour écrire la solution générale sous la forme $C_1e^{(r_1t)} + C_2e^{(r_2t)}$. Les conditions initiales déterminent ensuite les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt de vélo aboutisse à une vente ?

Appliquez la formule des probabilités totales : additionnez la probabilité de chaque type de vélo multipliée par la probabilité de vente conditionnelle à ce type. Ici, les deux branches sont le vélo électrique et le vélo mécanique.

Q : Comment organiser son temps pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Les parties sont annoncées comme indépendantes : avancez sur les questions accessibles, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les réponses et les arrondis demandés.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que la proportion réelle est dedans ?

Non. Pour l'échantillon observé, l'intervalle calculé ne garantit pas la présence de la proportion inconnue. Le niveau de 95 % décrit la fréquence avec laquelle la méthode produit un intervalle contenant la vraie proportion lors de prélèvements répétés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2023/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Chimie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.