Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — Page 3

2. **Séries de Fourier d'une fonction périodique paire** (10 questions) — Page 8

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — Page 13

Sujet officiel (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2023/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, en centimètres, lors de la fermeture. L'exercice mobilise une équation différentielle avec conditions initiales, puis l'étude des variations, la recherche du temps de fermeture et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On résout le trinôme en calculant son discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, avec $a = 1$ et $b = 5$, donne les deux solutions de l'équation caractéristique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux racines réelles sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

Le discriminant est strictement positif : l'équation caractéristique admet donc deux racines réelles distinctes, calculées à la question précédente. Le tableau fourni indique alors que toute solution de l'équation différentielle s'écrit comme une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines.

> On remplace ainsi r_1 et r_2 dans $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Aucune condition initiale supplémentaire n'est nécessaire pour donner la solution générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale entre M et O et de la vitesse initiale du tiroir, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut donc directement la valeur initiale de la fonction. La vitesse donnée dans l'énoncé est négative puisque le tiroir se rapproche du meuble ; elle correspond à la variation de cette distance par seconde.

- Distance initiale : 20 cm.
- Vitesse initiale : -10 cm·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À l'instant initial, $f(0) = 20$ cm et la vitesse est $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En utilisant l'expression admise de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

La distance demandée est la valeur de la fonction au temps $t = 2$ secondes. On utilise l'expression donnée dans l'énoncé et on y remplace chaque occurrence de t par 2. Les exponentielles restent sous forme exacte ; l'évaluation numérique permet seulement d'en vérifier l'ordre de grandeur.

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2} = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Après deux secondes, la distance exacte est $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}16$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

Il suffit de vérifier la distance à un instant strictement inférieur à 4 secondes. En utilisant l'expression de f, on obtient $f(3{,}9) = \frac{70}{3}e^{-3{,}9} - \frac{10}{3}e^{-15{,}6} \approx 0{,}472$ cm. Cette distance est inférieure au seuil de fermeture de $0{,}5$ cm.

- Instant vérifié : $3{,}9 < 4$ s.
- Distance : $0{,}472 < 0{,}5$ cm.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Oui, le constructeur a raison : la distance est déjà sous $0{,}5$ cm à $3{,}9$ s, avant quatre secondes.

Partie B

Question 1.a. **En rappelant que la limite de e⁻ᵘ est 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Quand t tend vers $+\infty$, les deux exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les exponentielles correspondantes tendent donc toutes deux vers zéro, selon la limite rappelée dans l'énoncé.

La limite d'une combinaison linéaire de ces deux termes est ainsi égale à zéro.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La limite de la fonction lorsque t tend vers $+\infty$ est 0.

Question 1.b. Déduire de la limite de f que sa courbe représentative possède une asymptote, puis en donner une équation.

Une courbe possède une asymptote horizontale à une extrémité de son domaine lorsque la fonction tend vers une limite finie en cette extrémité. Ici, la limite en $+\infty$ vaut zéro. La courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses lorsque le temps augmente.

1. Limite en $+\infty$: 0.
2. Équation de l'axe des abscisses : $y = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ avec la règle $(e^u)' = u'e^u$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, la dérivée de l'exposant $-4t$ vaut -4 ; le signe négatif du terme initial conduit donc à un terme dérivé positif.

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On sait que $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle : la fonction est donc strictement décroissante. À son extrémité gauche, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, la limite trouvée précédemment est nulle. Le tableau résume ces deux valeurs et le sens de variation.

t	0		$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$	0

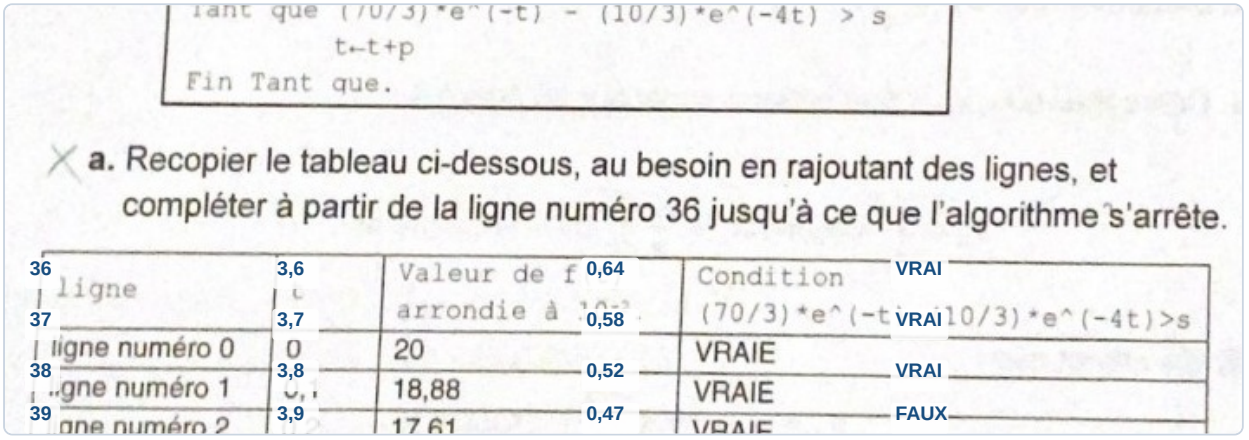
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, la fonction décroît strictement de 20 et tend vers 0.

Question 3.a. **Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième et le résultat du test de boucle.**

À chaque tour, l'algorithme ajoute $0{,}1$ à t, puis teste si $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs à inscrire sont arrondies au centième, comme demandé dans le tableau. Le test reste vrai pour $t = 3{,}8$, puis devient faux pour $t = 3{,}9$: il faut donc ajouter cette dernière ligne pour montrer l'arrêt de la boucle.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

Tableau de suivi complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

La dernière ligne est la ligne 39 : le test devient faux pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

La boucle s'exécute tant que $f(t) > 0{,}5$. Le test reste vrai à $t = 3{,}8$, puis devient faux à $t = 3{,}9$, car $f(3{,}9) \approx 0{,}47$ cm. La variable n'est donc plus incrémentée après cette valeur : c'est la valeur finale conservée par l'algorithme.

- La distance est alors inférieure au seuil de fermeture.
- Le temps obtenu est inférieur à quatre secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La variable vaut finalement $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé à cet instant.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer l'expression de m donnée dans le sujet.

On intègre les deux exponentielles séparément, puis on applique le facteur $\frac{1}{4}$ de la définition de la moyenne. Une primitive de e^{-t} est $-e^{-t}$, et une primitive de e^{-4t} est $-\frac{1}{4}e^{-4t}$. On évalue ensuite l'expression entre 0 et 4.

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

La position moyenne vaut exactement $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

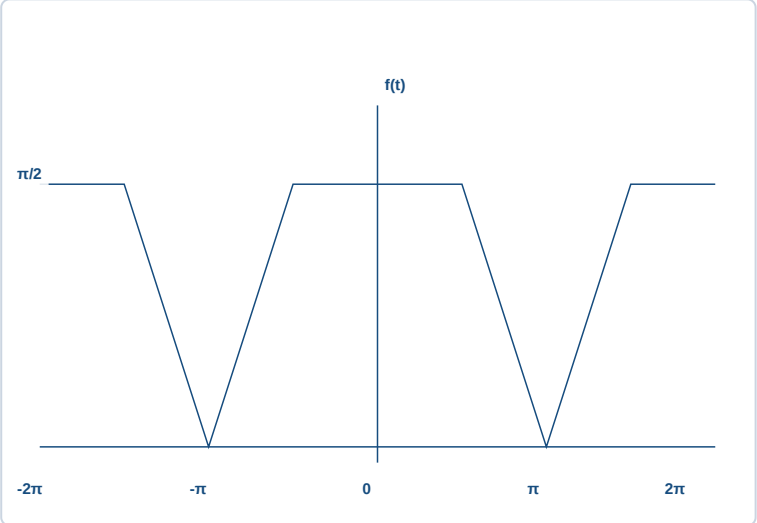
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire, périodique de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier, sa somme partielle d'ordre 3, l'identification de sa courbe et l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux, sa parité et sa période.

Sur $[0$,
$pi/2[$, la fonction vaut
$pi/2$, puis elle suit la droite $f(t) =$
$pi - t$ sur $[$
$pi/2$,
$pi]$. La parité reproduit le tracé de part et d'autre de 0, et la période 2
pi le répète. Sur l'intervalle demandé, les sommets sont donc les points de hauteur
$pi/2$ aux abscisses multiples de 2
pi, et les creux sont aux abscisses impaires de
pi.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer le motif périodique de période 2
pi : plateaux de hauteur
$pi/2$ centrés en $2k$
pi, et creux nuls en $(2k + 1)$
pi.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

D'après la formule du sujet, $b_n =$
$frac1pi$
$int_{-pi}^{pi} f(t)$

$sin(nt)$
, dt. La fonction f est paire et la fonction t
$mapsto$
$sin(nt)$ est impaire. Leur produit est impair. L'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle symétrique $[-$
pi,
$pi]$ est nulle, ce qui établit le résultat pour chaque entier n
$geq 1$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier n
> $geq 1$, le coefficient associé au sinus est nul : $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période indiquée dans le sujet est $T = 2$
pi. Le formulaire donne la relation entre période et pulsation :
$omega =$
$frac 2 pi T$. En remplaçant T par sa valeur, le numérateur et le dénominateur se simplifient. La pulsation correspond donc à une oscillation de base en radians par unité de temps.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La pulsation associée à la période 2
> pi est
> $omega = 1$ rad par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient de Fourier a_0 est égal à 3π/8.

Pour une fonction paire de période 2
pi, le formulaire donne $a_0 =$
$frac 1 pi$
$int_0^{pi} f(t)$
, dt. On sépare l'intégrale aux deux changements de définition : $f(t) =$
$pi/2$ sur $[0,$
$pi/2[$, puis $f(t) =$
$pi - t$ sur $[$
$pi/2,$
$pi]$. Ainsi, $a_0 =$
$frac 1 pi [$
$frac pi^2 4 +$
$frac pi^2 8]$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le coefficient constant vaut exactement $a_0 =$
$frac3pi8$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n est égal à la somme des deux intégrales indiquées dans le sujet.

Le formulaire donne, puisque f est paire, $a_n =$
$frac2pi$
$int_0^pi f(t)$
$cos(nt)$
$, dt$. On découpe cette intégrale en $[0,$
$pi/2]$ et $[$
$pi/2,$
$pi]$, selon les deux expressions de f. Sur le premier intervalle, le facteur constant
$pi/2$ transforme $2/$
pi en 1. On obtient bien, pour tout n
$geq1$, la somme demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout n
$geq1$, $a_n =$
$int_0^pi/2$
$cos(nt)$
$, dt +$
$frac2pi$
$int_pi/2^pi($
$pi - t)$
$cos(nt)$
$, dt.$

Question 6. En utilisant l'expression admise de a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On utilise l'expression admise $a_n =$
$frac2pin^2[$
$cos($
$fracnpi2) -$
$cos(n$
$pi)]$. Pour $n = 1$, les cosinus valent respectivement 0 et -1. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1. Pour $n = 3$, ils valent 0 et -1. La substitution fournit les coefficients exacts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les trois coefficients sont $a_1 =$
$frac2pi$, $a_2 = -$
$frac1pi$ et $a_3 =$
$frac29pi$.

Question 7. Déduire des coefficients obtenus l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ donnée dans le sujet.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 +$
$sum_{n=1}^{3} a_n$
$cos(nt)$, car tous les coefficients b_n sont nuls. On remplace a_0 par 3
$pi/8$, puis a_1, a_2 et a_3 par les valeurs obtenues à la question précédente. Cela donne l'expression demandée pour tout t.

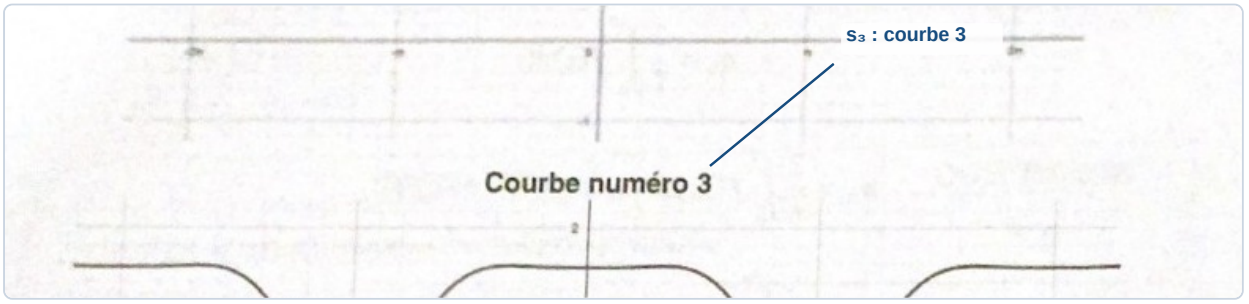
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) =$
$frac3pi8 +$
$frac2pi$
$cos(t) -$
$frac1pi$
$cos(2t) +$
$frac29pi$
$cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes fournies correspond à la fonction s_3.

La somme partielle possède une valeur maximale près de $t = 0$ et des minima positifs près de $t =$
pm
pi. Parmi les trois tracés du sujet, la courbe numéro 3 présente ces caractéristiques. Elle correspond donc à la somme partielle définie à la question précédente.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

La représentation de s_3 est la courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10⁻⁴ près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans $P = (a_0)^2 +$
$frac12[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. On obtient $P =$
$frac9pi^264 +$
$frac409162pi^2$. L'évaluation numérique donne environ $1{,}6437178$. L'arrondi au dix-millième est donc $1{,}6437$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À 10^{-4} près, P
$approx1{,}6437$.

Question 9.b. Sachant que F est la valeur efficace de f, que F² = π²/6 et que P approche F², choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le pourcentage d'erreur relatif à F^2 est
$frac|P - F^2|F^2$
$times100$. Avec P
$approx1{,}6437$ et $F^2 =$
$pi^2/6$, l'erreur vaut environ $0{,}074$
. Parmi les trois choix proposés, cette valeur est la plus proche de $0{,}1$
.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Choix exact parmi les réponses proposées : 0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle, puis une fonction périodique par les séries de Fourier et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme générale des solutions.
- La valeur moyenne de f sur [0 ; 4] est $m = 1/4 \int_0^4 f(t)\,dt$.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et $a_n = 4/T \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\,dt$.
- La pulsation d'une fonction de période T vaut $\omega = 2\pi/T$; la somme partielle s_n conserve les coefficients jusqu'au rang n.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f(t) est une distance en centimètres et t est exprimé en secondes.
- Pour vérifier la fermeture, comparer la distance à 0,5 cm et justifier la conclusion au temps demandé.
- Dans le tableau de l'algorithme, incrémenter t de 0,1 et s'arrêter lorsque le test de boucle devient faux.
- Pour l'erreur en pourcentage, comparer P à F^2 et sélectionner une seule proposition.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales pour déterminer la fonction décrivant le tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique afin d'obtenir la forme générale de f. Utilisez ensuite f(0) = 20 et f'(0) = -10 pour déterminer les constantes, en tenant compte des centimètres et des secondes.

Q : Pourquoi les coefficients sinus de Fourier sont-ils nuls dans cet exercice ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Ainsi, tous les coefficients b_n sont nuls.

Q : Comment compléter l'algorithme qui recherche le temps de fermeture ?

La variable t commence à 0 et augmente de 0,1 tant que f(t) est supérieure à 0,5. Évaluez la condition à chaque étape et arrêtez le suivi au premier test faux.

Q : Quelles précautions prendre pour présenter les calculs et les réponses ?

Montrez les étapes utiles pour les démonstrations et conservez les valeurs exactes lorsque cela est demandé. Respectez les arrondis indiqués, notamment au centième pour l'algorithme et à 10^{-4} pour P.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmc.fr/assets/annales/bts-mc/E2 - Mathématiques/2023/BTS MC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Chimie : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.